

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Pavol Radič

Modely úrokových měr

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, PhD.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2012

Chcel by som poďakovať všetkým, ktorí mi akýmkoľvek spôsobom pomohli pri spracovaní tejto bakalárskej práce. Moje poďakovanie patrí najmä vedúcemu práce, RNDr. Martinovi Brandovi, PhD., za cenné rady, odbornú pomoc a konzultácie, ktoré mi poskytol pri jej vypracovaní.

Osobitné poďakovanie patrí mojim rodičom a mojim najbližším za podporu a pochopenie počas písania tejto práce a behom celého štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Modely úrokových měr

Autor: Pavol Radič

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce studuje modelovanie vývoja úrokovej miery. Pojednáva o najznámejších modeloch okamžitej úrokovej miery. Podrobnejšie sa zaoberá Vašíčkovým, CIR a Ho & Lee modelom, kde je dynamika systému zadaná stochastickou diferenciálnou rovnicou. Ďalej rieši kalibráciu a tvorbu binomického úrokového stromu. Cieľom práce je popísať a porovnať medzi sebou rôzne stochastické modely úrokových mier.

Klíčová slova: Modely okamžitej úrokovej miery, Binomický úrokový strom, Bez-kupónový dlhopis

Title: Interest rate models

Author: Pavol Radič

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with modeling the development of interest rates. It discusses the most popular models of short interest rate. It focuses in detail on widely known short-rate models, i.e. Vašíček, CIR and Ho & Lee model where the dynamics of the system is described by stochastic differential equation. The next section offers dealing with the calibration and the creation of a binomial interest rate tree. The main purpose of this work is to describe different stochastic models of interest rates and compare them with each other.

Keywords: Short-rate models, Binomial interest rate tree, Zero-coupon bond

Obsah

Úvod	2
1 Základné pojmy a úvod do problematiky	3
1.1 Dlhopis a časová štruktúra úrokových mier	3
1.2 Okamžité úrokové miery	3
1.3 Deriváty úrokových mier	5
1.4 Wienerov proces a Itôovo lemma	5
1.5 Rizikovo neutrálna miera	9
2 Modelovanie časovej štruktúry úrokových mier	10
2.1 Jednofaktorové modely	10
2.1.1 Vašíčkov model	11
2.1.2 Cox-Ingersoll-Rossov model	14
2.1.3 Model Ho & Lee	15
2.2 Kalibrácia modelov na reálne dáta	16
2.2.1 Obecná metodika	16
2.2.2 Kalibrácia modelu Ho & Lee	17
2.3 Simulácia trajektórií	18
2.3.1 Vašíčkov model	18
2.3.2 Cox-Ingersoll-Rossov model	22
2.3.3 Model Ho & Lee	23
3 Stromy úrokových mier	24
3.1 Jednokrokový binomický strom	24
3.2 Viackrokový binomický strom	25
3.3 Vytvorenie stromu úrokových mier	26
3.4 Kalibrácia stromu úrokových mier	26
3.5 Príklad stromu úrokovej miery	29
Záver	30
Zoznam použitej literatúry	31
Zoznam obrázkov	32
Zoznam tabuliek	33
Prílohy	34

Úvod

V trhovej ekonomike hrá v súčasnom svete okrem trhu tovaru, trhu práce a trhu ostatných výrobných faktorov dominantnú rolu trh finančný. Typickým znakom trhu finančného je špeciálna forma zisku, ktorá plynie z finančných operácií a má prakticky vždy podobu úroku. Úrok ako typ výnosu z finančných operácií je veľmi dôležitou ekonomickou kategóriou. Podľa J.M.Keynesa sa dá úrok chápať ako odmena za zrieknutie sa likvidity. Svetová peňažná prax vytvorila nesmierne bohatú variету typov cenných papierov, ale i jednoduchých finančných nuancií a príslubov, ktoré majú všetky za cieľ uľahčiť financovanie najrôznejších zámerov a potrieb.

Úrokové deriváty sú finančnými inštrumentmi, ktorých cena závisí na hodnote úrokovej miery, pričom objem ich obchodov zďaleka prevyšuje všetky ostatné typy. Patria medzi ne napríklad opcie a futures na bondy, úrokové swapy, FRA, caps a mnohé iné. Základom ich ohodnocovania je znalosť dynamiky úrokovej miery. Pohyb úrokovej miery má náhodný charakter, ktorý sa dá popísať stochastickou diferenciálnou rovnicou. V súčasnej dobe neexistuje univerzálny model, i keď, ako mnohí veria, je jeho dosiahnutie len otázkou času.

Cieľom práce je popísať základné vlastnosti vybraných modelov, spraviť simulácie ich trajektórií s rôznymi nastaveniami parametrov a vytvoriť doporučenie, aký model je pre daný typ dát vhodný.

Celá práca je rozdelená na tri hlavné kapitoly, na časť týkajúcu sa základných pojmov a úvodu do problematiky, na časť modelovania časovej štruktúry úrokových mier a na časť zaoberajúcou sa úrokovými stromami.

V prvej kapitole zavedieme potrebné pojmy z teórie pravdepodobnosti a finančnej matematiky. Taktiež sa zoznámime s terminológiou z oblasti vybraných finančných derivátov.

V druhej kapitole sa zameriame na jednofaktorové modely okamžitej úrokovej miery, ktoré sú definované stochastickou diferenciálnou rovnicou. A to konkrétne na Vašíčkov model, CIR model a model Ho & Lee. Uvedieme si všeobecnú metódu ich kalibrácie, ktorú následne použijeme na model Ho & Lee.

V tretej kapitole sa budeme venovať simuláciám trajektórií modelov s rôznymi nastaveniami parametrov a tvorbe viackrokových binomických úrokových stromov.

1. Základné pojmy a úvod do problematiky

1.1 Dlhopis a časová štruktúra úrokových mier

Dlhopis (obligácia, bond), najjednoduchší derivát úrokovej miery, predstavuje veľmi rozšírený druh cenných papierov, ktorých emisiou si emitent opatruje úverový kapitál. Emitent dlhopisu je teda dlžník, zatiaľ čo držiteľ dlhopisu je veriteľ. V čase splatnosti je vlastníkovi vyplatená nominálna hodnota F a vo vopred dohodnutých časoch mu bude vyplácaný úrok (kupón). Bezakupónový dlhopis s nominálnou hodnotou $F = 1$ sa nazýva *diskontný dlhopis*. Ďalej budeme pod dlhopisom rozumieť diskontný dlhopis. Výnos (*úrovňová miera*) $R(t, T)$ je odvodený z ceny dlhopisu v čase t . Označme $P(t, T)$ cenu dlhopisu s maturitou T v čase t

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, 0 \leq t < T.$$

Vyjadrením $R(t, T)$ dostávame

$$R(t, T) = \frac{-\ln P(t, T)}{(T - t)}. \quad (1.1)$$

Štruktúrou úrokových mier sa obvykle mienia vzťahy medzi výnosmi do splatnosti jednotlivých dlhopisov. Keďže štruktúra úrokových mier závisí na celom rade faktorov (napr. riziko príslušných dlhopisov), budeme sa výhradne zaoberať časovou štruktúrou úrokových mier (angl. term structure of interest rates). Časová štruktúra úrokových mier vyjadruje závislosť výnosu $R(t, T)$ od doby do splatnosti dlhopisu v čase t , obecnne ju označujeme ako výnosová krivka (yield curve). V praxi dochádza nielen k zmenám úrokových mier v čase, ale tiež je nutné rešpektovať skutočnosť, že odlišnými úrokovými mierami sa prezentujú rôzne doby do splatnosti. Z tohoto dôvodu je potrebné zaviesť pojem spotovej a forwardovej úrokovej miery.

Spotová úrovňová miera $i_{0,n}$ pre dobu do splatnosti n je (ročná) tržná úrovňová miera aplikovateľná na finančnom trhu okamžite (= on the spot) pre úročenie a diskontovanie cez následné obdobie dĺžky n . *Forwardová úrovňová miera* $i_{t,n}$ medzi časovými obdobiami t a n ($t < n$) je (ročná) tržná úrovňová miera aplikovateľná na finančnom trhu až v budúcnosti (= forward) po uplynutí obdobia dĺžky t pre úročenie a diskontovanie čiastiek cez následné obdobie dĺžky $n - t$.

Trend výnosových kriviek býva v praxi skôr rastúci, t.j. s dlhšou dobou do splatnosti môžeme očakávať väčší výnos. Avšak ak súčasné úrokové miery sú príliš vysoké a trh očakáva ich pokles, tak výnosová krivka je invertovaná a výnosy dlhších dlhopisov budú nižšie ako kratších.

1.2 Okamžité úrokové miery

Táto podkapitola je inšpirovaná zdrojom [11]. Ak vo vzťahu (1.1) urobíme limitu $T \rightarrow t^+$, dostaneme okamžitú $r(t)$ úrokovú mieru (short rate), ktorá je definovaná

ako

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = R(t, t).$$

Okamžitá úroková miera je preto začiatkom výnosovej krivky. Forwardová úroková miera $f(t; T, T_1)$ v čase t na dobu od T do T_1 , $T_1 > T$ je definovaná na základe vzťahu

$$e^{R(t, T_1)(T_1 - t)} = e^{R(t, T)(T - t)} e^{f(t; T, T_1)(T_1 - T)}. \quad (1.2)$$

Okamžitá forwardová úroková miera $f(t, T)$ je definovaná ako

$$f(t, T) = \lim_{T_1 \rightarrow T} f(t; T, T_1).$$

Ukážeme, že platí

$$f(t, T) = -\frac{\partial P(t, T)}{\partial T} \frac{1}{P(t, T)} = \frac{-\partial \log P(t, T)}{\partial T}. \quad (1.3)$$

Použitím vzťahu (1.2) dostávame

$$e^{-R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t)} = e^{-R(t, T)(T - t)} e^{-f(t; T, T + \Delta T)\Delta T},$$

čo sa dá napísať ako

$$P(t, T + \Delta T) = P(t, T) e^{-f(t; T, T + \Delta T)\Delta T}$$

$$f(t; T, T + \Delta T) = -\frac{1}{\Delta T} \log \frac{P(t, T + \Delta T)}{P(t, T)}.$$

Odkiaľ dostávame

$$f(t, T) = -\lim_{\Delta T \rightarrow 0} -\frac{1}{\Delta T} (\log P(t, T + \Delta T) - \log P(t, T)).$$

Tento výraz je až na mínusové znamienko definíciou derivácie funkcie $\log P(t, T)$, čo sme chceli dokázať. Pre cenu dlhopisu s maturitou T v čase t platí

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right). \quad (1.4)$$

Výraz (1.4) plynie zo vzťahu

$$\log P(t, T) - \log P(t, t) = \int_t^T \frac{\partial \log P(t, s)}{\partial s} ds = -\int_t^T f(t, s) ds.$$

Keďže platí $P(t, t) = 1$, dostávame vzťah (1.4) .

1.3 Deriváty úrokových mier

Hlavne v 70. a 80. rokoch dvadsiateho storočia, začali vznikať finančné deriváty ako reakcia trhu na neistotu týkajúcu sa budúceho vývoja cien, keďže narastala volatilita úrokových sadzieb v dôsledku nestability finančných trhov. Medzi obchodovateľné deriváty úrokovej miery patria okrem dlhopisov aj forwardy, swapy, capy a mnohé iné.

Úrokový forward (FRA z anglického forward rate agreement), umožňuje zaistiť pre určité budúce obdobie pevnú úrokovú mieru zo získaného úveru alebo investovaného vkladu. Subjekt, ktorý na určitú dobu získa úver (respektíve bude investovať depozitum) za pohyblivú úrokovú mieru súvisujúcu s tržnou úrokovou mierou sa tak môže zaistiť voči vzostupu (ale i pádu) takejto úrokovej miery.

Naproti tomu pri úrokových swapoch nedochádza k žiadnej zmene kapitálu. *Úrokový swap* predstavuje dohodu o budúcej periodickej výmene úrokových platieb medzi dvoma stranami (anglické sloveso *swap* pôvodne znamenalo "prepriať"), pričom sú tieto platby zadefinované odlišne, ale vypočítavajú sa z rovnakej nominálnej kapitálovej čiastky. Je to vlastne určitá forma zaistenia proti riziku pohybu úrokových mier.

Úrokové opcie, ako podmienené deriváty (na rozdiel od forwardov a swapov ako pevných derivátov) predstavujú termínové kontrakty, v ktorých má držiteľ opcie v dlhej pozícii právo uskutočniť v dohodnutom termíne príslušný obchod, zatiaľ čo upisovateľ opcie v krátkej pozícii sa pasívne podriaďuje rozhodnutiu držiteľa opcie. Vstup do dlhej pozície preto nebýva bezplatný ako u pevných derivátoch, ale uskutoční sa kúpou opcie za opčnú prémii. Podobne vstup do krátkej pozície sa uskutoční predajom opcie za opčnú prémii.

Ďalším úrokovým derivátom používaným prevažne v medzibankovom styku sú capy (z anglického slova pre strop). *Cap* je dohoda, kde v dohodnutom čase kupujúci obdrží od predávajúceho rozdiel medzi trhovou úrokovou mierou a realizačnou cenou kontraktu v danom čase. Tento typ úrokových derivátov predstavuje zaistenie voči vysokej úrokovej miere. Protikladom ku capom, založeným na podobnom princípe sú *floory* (z anglického slova dno).

1.4 Wienerov proces a Itôovo lemma

Pre správne ocenenie úrokových derivátov by sme mali brať do úvahy ich náhodný charakter v čase. Najprv definujeme základné pojmy a zavedieme značenie, ktorého sa budeme v celej práci držať. Nasledujúce definície sme prebrali z [11].

Definícia 1. *Stochastický proces* je t -parametrický systém náhodných premenných $X(t), t \in I$. I je interval alebo diskrétna množina indexov.

Definícia 2. Systém σ -algebier $F_t, t \geq 0$ nazveme *filtráciou* ak $F_s \subset F_t$ pre $s < t$.

Pre stochastické procesy budeme používať pravdepodobnostný priestor s filtráciou, t.j. (Ω, F_t, P) . Filtrácia nám umožňuje s postupujúcim časom upresňovať dosiahnuté informácie.

Definícia 3. *Náhodný proces $X(t), t \geq 0$ nazveme **adaptovaný na filtráciu** $F_t, t \geq 0$ v prípade, ak je náhodná funkcia $X(t)$ F_t -merateľná pre každé $t \geq 0$.*

V tejto kapitole budeme ďalej predpokladať, že stochastické procesy sú adaptované na filtráciu.

Jedným z dôležitých nástrojov pri modelovaní okamžitých úrokových mier vo finančnej matematike je typ stochastického procesu - Brownov pohyb. Definície v ďalšej časti tejto kapitoly sme prebrali zo zdroja [14] a [8].

Definícia 4. Brownov pohyb $X(t), t \geq I$ je t -parametrický systém náhodných veličín, pričom

- i) všetky prírastky $X(t+\Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a rozptylom $\sigma^2\Delta$,
- ii) pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodne premenné s parametrami podľa bodu i),
- iii) $X(0) = 0$.

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.

Brownov pohyb $X(t), t \geq I$, ktorý má parametre μ a σ , môžeme analyzovať i z hľadiska jeho prírastkov $dX(t) = X(t+dt) - X(t)$. Z definície strednej hodnoty a rozptylu potom podľa definície 4 platí $E(dX(t)) = \mu dt$ a $Var(dX(t)) = \sigma^2 dt = \sigma^2 Var(dW(t))$. Z toho môžeme odvodiť, že Brownov pohyb môžeme charakterizovať jeho deterministickou a flukтуаčnou zložkou a prírastky $dX(t)$ môžeme vyjadriť v tvare diferenciálu

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t), \quad (1.5)$$

kde $W(t), t \geq 0$ je Wienerov proces a rovnica (1.5) je stochastická diferenciálna rovnica.

Definícia 5. Stochastický Itôov integrál. *Nech $\theta(t)$ je adaptovaný proces na intervale $[0, T]$, pre ktorý platí $\mathbb{E}(\int_0^T \theta^2(s) ds) < \infty$. Ďalej nech $\Pi = t_0, t_1, \dots, t_n$ je rozdelenie intervalu $[0, T]$, t.j.*

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T.$$

Ďalej definujeme jemnosť delenia

$$\|\Pi\| = \max_{k=0, \dots, n-1} (t_{k+1} - t_k).$$

Stochastický integrál

$$I(T) = \int_0^T \theta(s) dW(s)$$

je definovaný ako

$$I(T) = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \theta(t_k) [W(t_{k+1}) - W(t_k)].$$

Podstatné je, že sa musí brať hodnota funkcie $\theta(t)$ v ľavej časti jednotlivých intervalov delenia Π .

Definícia 6. Itôova izometria. Nech $\theta(t)$ je adaptovaný proces, ktorý je kvadraticky integrovateľný, tj. $\mathbb{E}(\int_0^T \theta^2(s) ds) < \infty$. Potom pre Itôov integrál $I(T) = \int_0^T \theta(s) dW(s)$ platí

$$\mathbb{E}[\int_0^T \theta(s) dW(s)]^2 = \int_0^T \mathbb{E}[\theta^2(s)] ds.$$

V literatúre (napr. [11]) sa často uvádza netriviálny dôsledok Itôovej izometrie

$$(dW(t))^2 = dt.$$

Definícia 7. Stochastická diferenciálna rovnica. Náhodný proces $X(t)$ je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dX(t) = \alpha(t, X(t))dt + \beta(t, X(t))dW(t),$$

ak

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s, X(s)) ds + \int_0^t \beta(s, X(s)) dW(s).$$

V prípade, že proces $X(t)$ môžeme vyjadriť v tomto tvare, nazývame $X(t)$ Itôovým procesom.

Analýza funkcií, ktorých jediná premenná, aktívum, spĺňa nejakú stochastickú rovnicu, má významnú úlohu pri oceňovaní finančných derivátov. Použitím Itôovho lemma môžeme vyjadriť stochastický diferenciál a proces riešenia stochastickej diferenciálnej rovnice.

Definícia 8. Itôovo lemma. Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, kde premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dW(t), \quad (1.6)$$

kde W je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW. \quad (1.7)$$

Podľa Itôovho lemma môžeme teda odvodiť diferenciál funkcie ceny bezkupónového dlhopisu s maturitou v čase T . Vytvorme portfólio dlhopisov, kde ϑ dlhopisov má maturitu v čase T_1 a jeden má maturitu v čase T_2 . Súčasná hodnota portfólia je:

$$\pi(t) = P(t, T_1) + \vartheta P(t, T_2).$$

Zmena ceny takéhoto portfólia vychádzajúceho z tvaru (1.6) a definície 8 je

$$d\pi = (\mu(t, T_1) + \vartheta \mu(t, T_2))dt + \left(\frac{\partial P(t, T_1)}{\partial r} \sigma + \vartheta \frac{\partial P(t, T_2)}{\partial r} \sigma \right) dW$$

Vývoj ceny portfólia bude deterministický, ak položíme

$$\vartheta = - \frac{\frac{\partial P(t, T_1)}{\partial r}}{\frac{\partial P(t, T_2)}{\partial r}},$$

a teda platí:

$$d\pi = dP(t, T_1) - \frac{\frac{\partial P(t, T_1)}{\partial r}}{\frac{\partial P(t, T_2)}{\partial r}} dP(t, T_2).$$

Keďže máme teraz deterministické portfólio, tak platí :

$$d\pi = \pi(t)dt. \quad (1.8)$$

Po dosadení do (1.8) postupnými úpravami dostávame

$$\frac{\mu(t, T_1) - P(t, T_1)r(t)}{\frac{\partial P(t, T_1)}{\partial r}} = \frac{\mu(t, T_2) - P(t, T_2)r(t)}{\frac{\partial P(t, T_2)}{\partial r}}.$$

K tejto rovnosti dochádza v prípade ľubovoľných dobý do splatnosti a teda hodnota zlomku závisí na (a je funkciou) r a t . Koeficient $\lambda_i(r, t)$ interpretujeme ako tržnú cenu faktorového rizika

$$\lambda_i(r, t) = \frac{\mu(t, T_i) - P(t, T_i)r(t)}{\frac{\partial P(t, T_i)}{\partial r}}.$$

Keby sme rozptyl σ a drift μ vyjadrili percentuálne ako: $\mu = m \cdot P(t, T_i)$ a $\frac{\partial P(t, T_i)}{\partial r} = \frac{\hat{\partial} P(t, T_i)}{\partial r}$, dostaneme

$$\lambda_i(r, t) = \frac{m(t, T_i) - r(t)}{\frac{\hat{\partial} P(t, T_i)}{\partial r}}. \quad (1.9)$$

Takýto percentuálny výnos z bezkupónového dlhopisu sa od bezrizikovej úrokovej miery líši o funkciu času. Túto funkciu nazývame Market price of risk.

1.5 Rizikovo neutrálna miera

V praxi sa neodporúča vyberanie dlhopisov len na základe výnosov do splatnosti (čo je vážený priemer príslušných spotových mier). *Omnoho účinnejšia je v tomto smere arbitrážna analýza dlhopisov založená na tom, že na eficientných finančných trhoch by mal platiť zákon jednej ceny (Law-of-one-price) zdroj [3].* Podľa tohto zákona existuje pre ľubovoľný systém finančných tokov práve jedna cena. Preto by sa mali dva perfektné finančné substitúty predávať v rovnaký čas za rovnakú cenu. V prípade neplatnosti tohoto zákona hovoríme o existencii arbitráží. V takomto prípade môže investor bez rizika realizovať zisk.

Operácie s dlhopismi sú spojené s veľkým množstvom rizík. Neexistencia arbitráže na trhu matematicky znamená, že existuje určitá rizikovo neutrálna miera, podľa ktorej sa dajú oceniť deriváty pomocou výpočtu stredných hodnôt. *Podľa lokálnej (EH) hypotézy, viď zdroj [11], sa očakávaný výnos z držania dlhopisu za malý časový okamih rovná $r(t)$*

$$r(t) = \frac{\mathbb{E}_t\left(\frac{\partial P(t,T)}{\partial t}\right)}{P(t,T)}.$$

Odtiaľ plynie, že hodnota takéhoto dlhopisu je

$$P(t,T) = \mathbb{E}_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right)\right],$$

kde \mathbf{E} je stredná hodnota pri rizikovo neutrálnom miere Q . *Ukazuje sa, že pre spojité modely je akceptovateľná iba táto lokálna hypotéza.* Podľa zdroju [7] pri väčšine ďalších hypotéz dochádza k arbitrážnym možnostiam. Táto hypotéza sa však dá použiť iba pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach. Ďalej budeme vychádzať len z tejto hypotézy.

Hodnoty derivátov teda nie sú stredné hodnoty pri pôvodnej reálnej úrokovej miere, ale pri rizikovo neutrálnom miere Q . Keďže pri rizikovo neutrálnom úrokovej miere môžeme oceňovať deriváty a reálna úroková miera nám umožňuje zachytiť vlastnosti, ktoré pozorujeme pri vývoji short-rate, bolo by užitočné nájsť prevod medzi zápismi týchto procesov v daných úrokových mierach. Podľa obrátenej Girsanovej vety (zdroj [13] str. 164) pre dve ekvivalentné miery P a Q existuje proces λ_t taký, že

$$\widehat{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds \quad (1.10)$$

je Wienerov proces v miere Q . Zo vzťahu (1.10) napísanom v diferenciálnom tvare $d\widehat{W}_t = dW_t + \lambda_t dt$, vieme prepisovať proces z jednej miery do druhej. Avšak tento prístup nie je veľmi praktický, keďže nehovorí nič o tvare λ_t . Iný prístup k tomuto problému je opísaný v zdroji [9].

2. Modelovanie časovej štruktúry úrokových mier

2.1 Jednofaktorové modely

Existujú rôzne prístupy ako modelovať úrokové miery. V tejto bakalárskej práci sa zaoberáme modelmi okamžitej úrokovej miery, ktoré sú formulované pomocou rovnice (1.5). Funkciu $\mu(X, t)$ nazývame trendom, driftovou časťou rovnice, a $\sigma(X, t)$ vyjadruje rozptyl v okolí driftu. Na základe rôznych volieb rozptylu a driftu dostávame rôzne modely úrokových mier. Ak X je skalár, dostávame jednofaktorový model, v prípade vektoru ide o viac-faktorové modely. Prehľad niektorých modelov úrokových mier je uvedený v tabuľke 2.1.

Na rozdiel od cien akcií, majú úrokové miery tendenciu ostávať v rovnovážnej hodnote, alebo sa pohybujú v určitom rozmedzí, obvykle nerastú do nekonečna a neklesajú pod nulu. Stochastické modely, ktoré popisujú správanie úrokových mier, by mali brať v úvahu vyššie uvedené vlastnosti. Jednofaktorové modely však môžu brať v úvahu len jeden náhodný parameter, ktorým je okamžitá úroková miera.

Preto pre svoju relatívnu jednoduchosť sú jednofaktorové modely obľúbené medzi praktikmi. Množstvo výskumníkov sa však zameralo na vývoj dvojfaktorových modelov. Ako príklad môžeme uviesť model M. J. Brennana a E. S. Schwartza, ktorí sa pokúsili transformovať proces pre krátkodobú úrokovú mieru do náhodného procesu pre dlhodobú mieru. Dlhodobú úrokovú mieru stanovili ako výnos na večné štátom vydané konsolidačné dlhopisy. Keďže výnos z konsolidačných dlhopisov je recipročný ich cene, uvažujú model s dvoma premennými, a to okamžitou úrokovou mierou r a cenou konsolidačných dlhopisov P .

Na základe empirickej štúdie modelov úrokových mier (bližšie [12]) sme dostali dôležité požiadavky, ktoré by mali modely úrokových mier spĺňať.

- Reálne úrokové miery nemôžu byť záporné.
- Vysoké (nízke) hodnoty úrokovej miery sú pravdepodobnejšie nasledované nízkymi (vysokými) hodnotami, ako vysokými (nízkymi). Táto vlastnosť je zachytená v *mean-reverting* procese použitom napríklad vo Vašíčkovom modeli.
- Rozptyl úrokových mier zvykne byť väčší pre krátkodobé úrokové miery ako pre dlhodobé.

Rok	Model	SDR	$r_t > 0$	$r_t \sim$	AB
1977	Vašíček	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$	N	N	A
1978	Dothan	$dr_t = ar_t dt + \sigma r_t dW_t$	A	LN	A
1985	Cox-Ingersoll-Ross	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$	A	$NC\chi^2$	A
1990	Hull & White	$dr_t = \kappa(\theta_t - r_t)dt + \sigma dW_t$	N	N	A
1990	Exp. Vašíček	$dr_t = r_t(\mu - a\ln r_t)dt\sigma r_t dW_t$	A	LN	N
1991	Black & Karasinski	$dr_t = r_t(\mu_t - a\ln r_t)dt + \sigma r_t dW_t$	A	LN	N
1992	CKLS	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$	A	-	N

Vysvetlivky: A=áno, N=nie, AB=existencia explicitného riešenia ceny dlhopisu, N=normálne rozdelenie, LN=lognormálne rozdelenie, $NC\chi^2$ =necentrálny chí-kvadrát rozdelenie.

Tabuľka 2.1: Prehľad jednofaktorových modelov okamžitej úrokovej miery

2.1.1 Vašíčkov model

Tento model predpokladá, že okamžitá spotová úroková miera sa riadi rovnicou

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad (2.1)$$

pričom a, b a σ sú kladné konštanty. Takýto model má vlastnosť *mean reversion*, ktorá je blízko empiricky odvodeným vlastnostiam. Parameter b môžeme považovať za dlhodobu očakávanú úroveň úrokovej miery. To znamená, že v prípade keď je úroková miera menšia ako b , je drift kladný a úroková miera je tlačaná nahor. V prípade, že je úroková miera väčšia ako b , je drift záporný. Proces s touto vlastnosťou sa nazýva *Ornstein-Uhlenbeckov proces*. Ak budeme predpokladať, že tržná cena rizika λ je konštantná v čase (ako sa často robí v praxi), dostáva pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti rovnica (2.1) podobu

$$dr(t) = [a(b - \lambda \frac{\sigma}{a} - r(t))]dt + \sigma dW(t).$$

Tento výraz je štrukturálne rovnaký ako (2.1) a preto pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti Q môžeme chápať (2.1) ako rovnicu okamžitej spotovej úrokovej miery. Pomocou Itôovej vety sa dá odvodiť, že riešenie (2.1) pri rizikovo neutrálnej metodike a za predpokladu, že tržná cena rizika λ je konštantná v čase, dostáva podobu

$$r(t) = e^{-at}r(0) + b(1 - e^{-at}) + \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s).$$

Odvedenie nasledujúceho vzťahu môžeme nájsť v zdroji [2].

$$\int_0^t e^{as} dW(s) \sim N(0, \int_0^t e^{2as} ds) = N(0, \frac{e^{2at} - 1}{2a}).$$

Potom platí:

$$r(t) \sim N(e^{-at}r(0) + b(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2(1 - e^{-2at})}{2a}).$$

Z toho plyní, že úroková miera má normálne rozdelenie, z čoho môžeme odvodiť, že s kladnou pravdepodobnosťou tento model pripúšťa zápornú úrokovú mieru. Ďalej sa dá ukázať, viď [15], že od určitého momentu môže mať záporné

hodnoty navždy. Toto je dosť nevýhodná vlastnosť Vašíčkovho modelu. Krátkodobá zápornosť úrokových mier by nevadila, ak by sme brali úrokovú mieru v reálnom vyjadrení (nominálna úroková miera mínus miera inflácie). K nájdeniu ceny bezkupónového dlhopisu s jednotkovou nominálnou hodnotou, ktorá je funkciou premenných $r(t)$, t a T , ďalej len $g(x, t, T)$, použijeme Itôovu lemmu a tak nájdeme aj $\sigma(t, T)$ a $f(0, T)$. Časť nasledujúceho postupu sme čerpali zo zdroja [11]. Pre funkciu $g(x, t, T)$ platí

$$\int_t^T f(t, s) ds = -\ln P(t, T) = g(r(t), t, T),$$

$$g(x, t, T) = -\ln(P(t, T)|r(t) = x) = -\ln E_Q[\exp(-\int_t^T r(s) ds)|r(t) = x]. \quad (2.2)$$

Proces $r(t)$ je Markovský a z nezávislosti koeficientov a , b a σ na čase t vyplýva, že ak proces začína v $r(t)$, je časový interval od t do T analogický k intervalu 0 do $T - t$. $R(t)$ teda môžeme napísať ako

$$r(t) = b + e^{-a(T-t)}(x - b) + \sigma e^{-a(T-t)} \int_0^{T-t} e^{au} dW(u). \quad (2.3)$$

Integráciou rovnice (2.3) dostávame

$$\begin{aligned} \int_t^T r(s) ds &= b(T-t) + (x-b) \int_t^T e^{-a(s-t)} ds \\ &+ \int_t^T (\sigma e^{-a(s-t)} \int_0^{s-t} e^{au} dW(u)) ds \\ &= b(T-t) + \frac{1}{a}(x-b)(1 - e^{-a(T-t)}) \\ &+ \int_t^T (\sigma e^{-a(s-t)} \int_0^{s-t} e^{au} dW(u)) ds. \end{aligned}$$

Pre posledný sčítanec platí $t \leq s \leq T$ a $0 \leq u \leq s - t$, z čoho dostaneme $t + u \leq s \leq T$. Potom

$$\begin{aligned} \int_t^T (\sigma e^{-a(s-t)} \int_0^{s-t} e^{au} dW(u)) ds &= \int_0^{T-t} (\int_{t+u}^T \sigma e^{-a(s-t)} ds) e^{au} dW(u) \\ &= \int_0^{T-t} (b(e^{-au} - e^{-a(T-t)})e^{au}) dW(u) = \int_0^{T-t} b(1 - e^{-a(T-t-u)}) dW(u). \end{aligned}$$

Tento integrál predstavuje náhodnú veličinu, ktorá má normálne rozdelenie, a jej rozptyl je rovný:

$$\begin{aligned} Var \left[\int_0^{T-t} b(1 - e^{-a(T-t-u)}) dW(u) \right] &= \int_0^{T-t} b^2(1 - e^{-a(T-t-u)})^2 du \\ &= \int_0^{T-t} b^2(1 - 2e^{-a(T-t-u)} + e^{-2a(T-t-u)}) dW(u) \\ &= b^2(T-t) - \frac{2b^2}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{b^2}{2a}(1 - e^{-2a(T-t)}) \\ &= \hat{\sigma}^2(t, T). \end{aligned}$$

A teda môžeme napísať, že

$$\int_t^T r(s) ds = b(T-t) + \frac{1}{a}(x-b)(1-e^{-a(T-t)}) + Z, \quad (2.4)$$

pričom $Z \sim N(0, \hat{\sigma}^2(t, T))$. Úpravami a po dosadení (2.4) do rovnosti (2.2) dostávame

$$\begin{aligned} g(x, t, T) &= -\ln E_Q[\exp(-\int_t^T r(s) ds) | r(t) = x] \\ &= b(T-t) + \frac{1}{a}(x-b)(1-e^{-a(T-t)}) - \ln E_Q[\exp(-Z)] \\ &= b(T-t) + \frac{1}{a}(x-b)(1-e^{-a(T-t)}) \\ &\quad - \ln E_Q[\exp(-Z - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t, T) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t, T))] \\ &= b(T-t) + \frac{1}{a}(x-b)(1-e^{-a(T-t)}) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t, T). \end{aligned}$$

Pomocou týchto vzťahov môžeme vyjadriť funkciu $g(r(0), 0, T)$ ako

$$\begin{aligned} g(r(0), 0, T) &= bT + \frac{1}{a}(r(0)-b)(1-e^{-aT}) - \frac{\sigma^2}{2a^2}T \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^3}(1-e^{-aT}) - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-2aT}). \end{aligned}$$

Deriváciou $g(r(0), 0, T)$ podľa času T dostaneme $f(0, T)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(r(0), 0, T)}{\partial T} &= b + e^{-aT}(r(0)-b) - \frac{\sigma^2}{2a^2} + \frac{\sigma^2}{a^2}e^{-aT} - \frac{\sigma^2}{2a^2}e^{-2aT} \\ &= b + e^{-aT}(r(0)-b) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-aT})^2 \\ &= f(0, T). \end{aligned}$$

Volatilitu $\sigma(t, T)$ môžeme vyjadriť ako

$$\sigma(t, T) = \sigma \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial T} = \sigma e^{-a(T-t)}.$$

Po ďalších úpravách sa dá ukázať (viď. [10]), že cena bezkupónového dlhopisu s menovitou hodnotou 1 je:

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)}, \quad (2.5)$$

kde

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \\ A(t, T) &= \frac{(B(t, T) - (T-t))(a^2b - \frac{\sigma^2}{2})}{a^2} - \frac{\sigma^2 B^2(t, T)}{4a}. \end{aligned}$$

Časová štruktúra úrokových mier nadobúda po dosadení (2.5) do vzťahu (1.2) tvar

$$R(t, T) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2} + (r(t) - b + \frac{\sigma^2}{2a^2}) \frac{1}{a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}).$$

Vašíček (zdroj [15]) ukázal, že ak je

$$r(0) \leq b - \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{4a},$$

potom je časová štruktúra úrokových mier rastúca. Klesajúca je pre

$$r(0) > b - \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{4a}.$$

2.1.2 Cox-Ingersoll-Rossov model

Cox, Ross a Ingersoll pozmenili Vašíčkov model tak, aby odstránili najzávažnejší nedostatok Vašíčkovho modelu, a to možnosť zápornosti úrokovej miery. Stochastická diferenciálna rovnica pre okamžitú úrokovú mieru $r(t)$ má pri rizikovo neutrálnej miere Q tvar:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt - \sigma\sqrt{r(t)}dW(t). \quad (2.6)$$

Tento model má vlastnosť *mean reversion*. Proces je priťahovaný k priemernej hodnote b . Z dôvodu nezápornosti a a b zostáva úroková miera nezáporná. V prípade $r(t)$ blízkeho nule sa difúzny koeficient stáva nulovým a vďaka kladnému driftu neklesne $r(t)$ pod nulovú hodnotu. V prípade parametra

$$ab \geq \frac{1}{2}\sigma^2,$$

je potom proces $r(t) > 0$. Nájdenie explicitného vzťahu pre funkciu ceny bezkupónového dlhopisu nie je jednoduché. Tento výpočet môžeme nájsť v [10]. Výsledná cena bezkupónového dlhopisu je daná vzťahom

$$P(t, T) = A(\tau)e^{B(\tau)r(t)},$$

kde

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \left[\frac{2\gamma e^{\frac{1}{2}\beta\tau}}{2\gamma + \beta(1 - e^{-\tau\sigma})} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}}, \\ \gamma &= \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2}, \\ \beta &= a + \lambda + \gamma, \\ B(\tau) &= \frac{-2(1 - e^{-\gamma\tau})}{2\tau + \beta(1 - e^{-\gamma\tau})}, \\ \tau &= T - t. \end{aligned}$$

Časová štruktúra úrokových mier $R(t, T)$ vyjadrená zo vzťahu (1.2) má potom tvar

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t}[B(\tau)r(t) + \log A(\tau)].$$

Limita $R(t, T)$ pre $\rightarrow \infty$ je

$$R = \frac{2ab}{a + \lambda + \gamma}.$$

Autori modelu odvodili [4], že ak je $r(t) < R$, potom je časová štruktúra úrokových mier monotónne rastúca. Monotónne klesajúca je pre $r(t) > \frac{ab}{a + \lambda}$.

2.1.3 Model Ho & Lee

Ho a Lee navrhli tento model v roku 1986. Podľa tohoto modelu sa okamžitá úroková miera pri rizikovo neutrálnej miere Q riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou v tvare

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t),$$

kde

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t.$$

Tento model síce nemá vlastnosť *mean reversion*, ale vďaka deterministickej funkcii $\theta(t)$, tvorenej forwardovými úrokovými mierami $f(0, t)$, v sebe obsahuje všetky dostupné informácie. Budeme postupovať podobne ako pri Vašíčkovom modeli a zadefinujeme si funkciu ceny bezkupónového dlhopisu $g(x, t, T)$ pomocou vzťahu (1.3) ako

$$g(x, t, T) = -\ln \mathbb{E}_Q[\exp(\int_t^T r(s) ds) | r(t) = x], \quad (2.7)$$

pričom z definície 7 môžeme vyjadriť $r(s)$ ako

$$r(s) = r(t) + \int_t^s \sigma dW(u) + \int_t^s \theta(u) du = x + \int_t^s \sigma dW(u) + \int_t^s \theta(u) du.$$

Ak túto rovnicu zintegrujeme, dostaneme

$$\int_t^T r(s) ds = x(T - t) + \int_t^T \int_t^s \sigma dW(u) ds + \int_t^T \int_t^s \theta(u) du ds,$$

čo platí pre $t \leq u \leq s \leq T$. Ak zmeníme poradie integrovania dostaneme

$$\begin{aligned} \int_t^T r(s) ds &= x(T - t) + \int_t^T \int_u^T \sigma ds dW(u) + \int_t^T \int_u^T \theta(u) ds du \\ &= x(T - t) + \int_t^T (T - u) \sigma dW(u) + \int_t^T (T - u) \theta(u) du. \end{aligned}$$

Pričom pre posledný sčítanec platí (odvodené v [2])

$$\begin{aligned} \int_t^T (T - u) \sigma dW(u) &= Z \sim N(0, \int_t^T (T - u)^2 \sigma^2 du) \\ &= N(0, \frac{1}{3} \sigma^2 (T - t)^3). \end{aligned}$$

Potom môžeme vzťah (2.7) vyjadriť ako

$$g(x, t, T) = x(T - t) + \int_t^T \theta(u)(T - u) du - \ln \mathbb{E}_Q[\exp(-Z)].$$

Vieme, že platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[\exp(-Z)] &= \mathbb{E}_Q[\exp(-Z - \frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^3 + \frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^3)] \\ &= \exp[\frac{1}{6} \sigma^2 (T - t)^3]. \end{aligned}$$

Po dosadení dostávame konečnú podobu hľadanej funkcie $g(x, t, T)$

$$g(x, t, T) = x(T - t) + \int_t^T \theta(u)(T - u) du - \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^3. \quad (2.8)$$

Volatilita $\sigma(t, T)$ bude potom nadobúdať tvar

$$\sigma(t, T) = \sigma \frac{\partial^2 g(x, t, T)}{\partial x \partial T} = \sigma.$$

Forwardovú úrokovú mieru $f(0, T)$ dostaneme ako

$$f(0, T) = \frac{\partial g(r(0), 0, T)}{\partial T} = r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2 T^2 + \int_0^T \theta(u) du. \quad (2.9)$$

Tento vzťah zabezpečuje to, že počiatočná hodnota krivky forwardových úrokových mier môže byť ľubovoľná. Po zderivovaní vzťahu (2.9) podľa T dostávame vzťah

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t.$$

Možné driftы okamžitých úrokových mier tohoto modelu môžu teda nadobúdať veľkú škálu hodnôt. Jednoduchosť modelu ale spočíva v štruktúre rozptylu $\sigma(t, T) = \sigma$. Autori modelu odvodili (zdroj [6]), že cena diskontného dlhopisu má v Ho & Lee modeli lognormálne rozdelenie.

2.2 Kalibrácia modelov na reálne dáta

Základným problémom každého modelu je odhad parametrov tak, aby čo najpresnejšie odrážali napozorované hodnoty. Konkrétne to pre nás znamená, aby sa v súčasnosti napozorované ceny zero bondov zhodovali s hodnotami vypočítanými z modelu. Potom dostaneme pevný začiatkový bod pre odhad cien bezkupónového dlhopisu v budúcnosti. Keďže vychádzame z rizikovo neutrálnej metodiky, bude nutné zistiť tržnú cenu rizika. Uvedieme si metódu kalibrácie aplikovanú na model Ho & Lee. V tejto časti je opísaná metóda kalibrácie uvedená v [11].

2.2.1 Obecná metodika

Myšlienku, že riešenie niektorých typov parciálnych diferenciálnych rovníc môžeme vyjadriť ako strednú hodnotu určitého náhodného procesu (a naopak) vyjadruje Feynman-Kacova veta.

Definícia 9. Feynman-Kacova veta. *Nech všetky ďalej uvedené funkcie a procesy spĺňajú určité technické predpoklady¹. Majme náhodný proces v tvare*

$$dX(t) = \alpha(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t). \quad (2.10)$$

Definujeme strednú hodnotu

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{t, X(t)=x} f(X(T)),$$

¹Tieto predpoklady sa dajú nájsť v zdroji [5]

pre $0 \leq t \leq T$. Potom

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t, x) + \alpha(x)\frac{\partial}{\partial x}v(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t, x) = 0 \quad (2.11)$$

$$v(T, x) = f(x),$$

pre ľubovoľne zvolenú reálnu funkciu $f(x)$ (napríklad hodnota derivátu v čase T).

Predpokladáme, že dynamika úrokovej miery $r(t)$ má tvar (2.10).

1. Pre každé pevné T vyriešime rovnice (2.10) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_T(t, r; \alpha)}{\partial t} + \mu \frac{\partial F_T(t, r; \alpha)}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F_T(t, r; \alpha)}{\partial r^2} - rF_T(t, r; \alpha) &= 0, \\ F_T(T, r, \alpha) &= 1, \end{aligned}$$

ktoré nám určia modelovú cenu bondu $P(t, T, \alpha) = F_T(t, r, \alpha)$, kde α je vektor neznámych premenných².

2. Teraz treba zlúčiť túto cenu s napozorovanými veličinami. Pre každé $T > 0$ poznáme skutočnú cenu bondu $P^*(0, T)$, ktorú položíme rovnú $P(0, T; \alpha)$. Takto dostaneme sústavu rovníc, ktorých neznáma je vektor α .
3. Označíme riešenie sústavy α^* a postup opakujeme v pravidelných časových intervaloch.

2.2.2 Kalibrácia modelu Ho & Lee

Ako vieme z kapitoly 2.1.3 je model Ho & Lee daný rovnicou

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t),$$

kde parameter σ položíme rovný dennej smerodatnej odchýlke absolútnych výnosov okamžitej úrokovej miery. Pre cenu bezkupónového dlhopisu s jednotkovou nominálnou hodnotou $g(x, t, T)$, ktorá je funkciou premenných $r(t)$, t a T platí

$$\int_t^T f(t, s) ds = -\ln P(t, T) = g(r(t), t, T).$$

Dosadením riešenia (2.8), funkcie $g(x, t, T)$, do predchádzajúceho vzťahu, dostaneme tvar affinej časovej štruktúry modelu

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)},$$

kde

$$\begin{aligned} B(t, T) &= T - t, \\ A(t, T) &= \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^3 - \int_t^T \theta(u)(T - u) du, \\ \theta(t) &= \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t. \end{aligned}$$

²Například pre Vašíčkov model $\mu(t, r; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1(\alpha_2 - r)$, $\sigma(t, r; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_3$.

Takto vypočítané modelové ceny derivátov (v tomto prípade bezkupónového dlhopisu) sa pre $t = 0$ majú rovnať momentálne napozorovaným cenám $P^*(0, T)$. Tu je jednoduchšie využitie forwardových mier, ktoré sú ekvivalentné znalosti ceny bezkupónového dlhopisu. Pre empirické forwardové miery platí

$$f^*(0, T) = \frac{\partial \log P^*(0, T)}{\partial T}.$$

Položením rovnosti empirickej a modelovej forwardovej miery a vyriešením sústavy obyčajných stochastických diferenciálnych rovníc plynúcich z definície affinej štruktúry (kniha [11] str. 40) dostaneme modelovú cenu bondu v budúcnosti

$$P(t, T) = \frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} e^{(T-t)f^*(0, t) - \frac{\sigma^2}{2} t(T-t)^2 - (T-t)r(t)}.$$

2.3 Simulácia trajektórií

V tejto kapitole sa zameriame na simulácie trajektórií s rôznymi nastaveniami parametrov modelov doteraz opísaných v našej práci.

2.3.1 Vašíčkov model

Vašíčkov model je jedným z modelov okamžitej úrokovej miery. Z časti 2.1.1 vieme, že Vašíčkov model má tvar

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t).$$

Okamžitá spotová úroková miera na trhu pozorovateľná nie je, preto musíme miesto nej použiť aproximáciu. Všeobecne sa neodporúča voliť O/N sadzbu (ang. over night), ktorá je veľmi volatilná. V praxi sa najčastejšie volí napr. 1M, 2M alebo 3M sadzba. Najskôr sme všetky parametre Vašíčkovho modelu kalibrovali pomocou metódy maximálnej vierohodnosti opísanej a odvodennej v [1]. V tomto prípade je ľahšie odhadnúť nasledujúce funkcie parametrov

$$\begin{aligned}\alpha &= e^{-ad}, \\ V &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2ad}), \\ \beta &= \frac{b}{a},\end{aligned}$$

kde d značí časový krok pozorovaných r_0, r_1, \dots, r_n najčastejšie rovný jeden deň. Maximálne vierohodné odhady potom sú

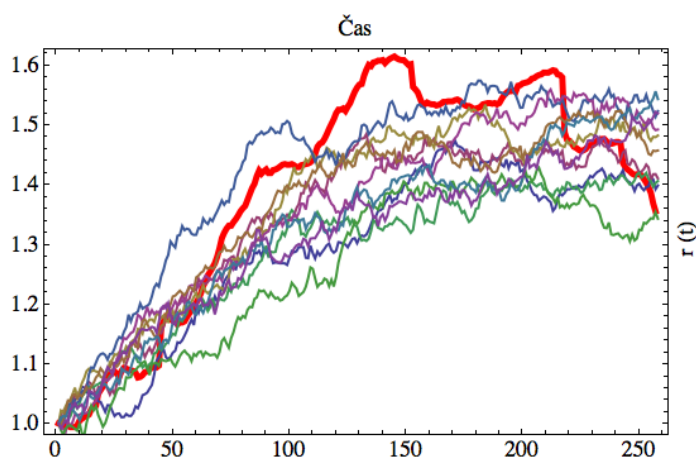
$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2 - (\sum_{i=1}^n r_{i-1})^2}, \\ \beta &= \frac{\sum_{i=1}^n [r_i - \alpha r_{i-1}]}{n(1 - \alpha)}, \\ V &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [r_i - \alpha r_{i-1} - \beta(1 - \alpha)]^2.\end{aligned}$$

Parameter	Hodnota
a	0.00767412
b	1.56877
σ	0.00829299

Tabuľka 2.2: Nakalibrované parametre Vašíčkovho modelu

Kalibráciu sme spravili na dátach zo stránky www.euribor.eu, konkrétne na historických hodnotách 3M EURIBOR sadzby z roku 2011. Hodnoty takto získaných parametrov sú uvedené v tabuľke 2.2.

Ak sa pozrieme na parametre vypočítané z historických dát a na vývoj 3M EURIBORu je logické, že hodnota parametra b (návratová hodnota sadzby) je okolo 1.5%. Takto odhadnuté hodnoty parametrov sme použili na simuláciu Vašíčkovho modelu. Porovnanie desiatich simulácií s vypočítanými parametrami a skutočných hodnôt 3M EURIBORu z roku 2011 je zobrazené na obr. 2.1. Skutočný priebeh 3M EURIBORu je znázornený červenou farbou.



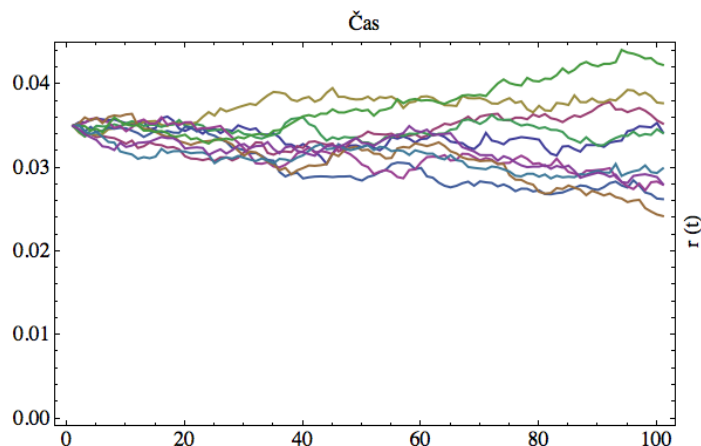
Obr. 2.1: Porovnanie simulácií a skutočnej sadzby za rok 2011.

Pri ďalších simuláciách sa zameriame na dopad hodnôt jednotlivých parametrov na výsledné dáta. Pre nasledujúce simulácie sme použili hodnoty parametrov uvedené v tabuľke 2.3.

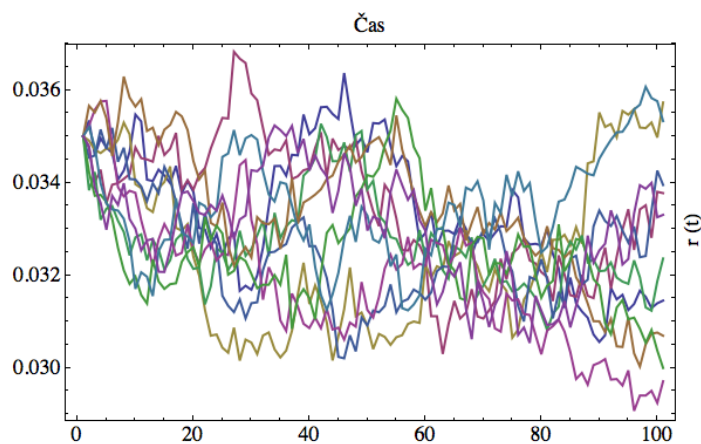
Parameter	Obrázok 2.2	Obrázok 2.3
a	0.25	1
b	0.0325	0.0325
σ	0.0064	0.0064

Tabuľka 2.3: Hodnoty parametrov simulácií Vašíčkovho modelu s rôznou hodnotou parametra a .

Z obrázkov 2.2 a 2.3 a tvaru rovnice modelu (2.1) môžeme pozorovať, že parameter a má vplyv hlavne na veľkosť zmien v pohybe úrokovej miery. Pre naše nastavenie parametrov platí, že čím väčšia bude hodnota tohoto parametru, tým pravdepodobnejšie bude v simuláciach dochádzať k častejším zmenám v pohybe úrokovej miery. Preto majú simulácie na obrázku 2.2 s nižšou hodnotou parametra a väčší rozptyl od počiatočnej hodnoty.



Obr. 2.2: 10 simulácií Vašíčkovho modelu s parametrom $a = 0.25$.



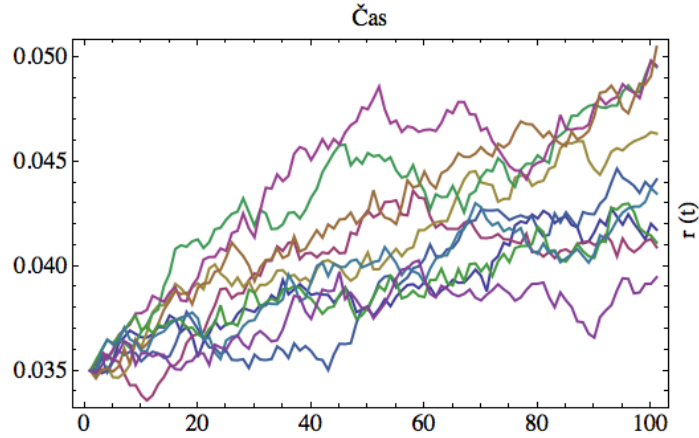
Obr. 2.3: 10 simulácií Vašíčkovho modelu s parametrom $a = 1$.

Parameter b vplýva hlavne na rozptyl trajektórií jednotlivých náhodných procesov. Obecne môžeme povedať, že čím je parameter b menší (hlavne oproti hodnote r) tým väčší rozptyl tento náhodný proces má. Použité parametre pri simulácii Vašíčkovho modelu sú v tabuľke 2.4.

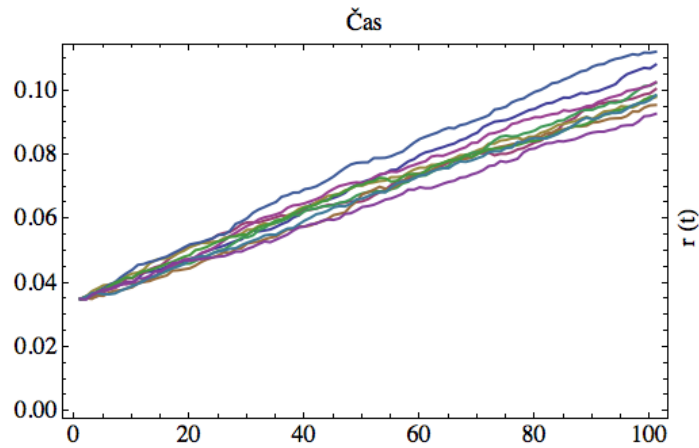
Parameter	Obrázok 2.4	Obrázok 2.5
a	0.25	0.25
b	0.1	0.6
σ	0.0064	0.0064

Tabuľka 2.4: Hodnoty parametrov simulácií Vašíčkovho modelu s rôznou hodnotou parametra b .

Tento jav sa dá pozorovať z obrázkov 2.4 a 2.5.

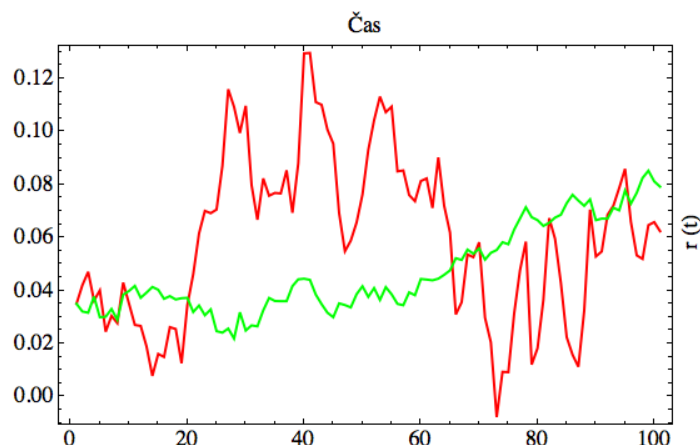


Obr. 2.4: 10 simulácií Vašíčkovho modelu s parametrom $b = 0.1$.



Obr. 2.5: 10 simulácií Vašíčkovho modelu s parametrom $b = 0.6$.

Parameter σ má podstatný vplyv, ak znova predpokladáme konštantné hodnoty ostatných parametrov, na výšku zmeny hodnoty úrokovej miery za časovú jednotku. Toto môžeme pozorovať na obrázku 2.6, kde je simulácia prvého modelu s nižšou hodnotou σ znázornená zelenou farbou a simulácia druhého modelu, s vyššou hodnotou σ , znázornená červenou farbou.



Obr. 2.6: Rôzne nastavenie parametra σ

Tu sme použili parametre z tabuľky 2.5 uvedenej nižšie.

Parameter	Hodnoty 1. modelu	Hodnoty 2. modelu
a	0.25	0.25
b	0.1	0.1
σ	0.05	0.2

Tabuľka 2.5: Parametre simulácií Vašíčkovho modelu pri rôznej hodnote σ .

U Vašíčkovho modelu môžeme pozorovať, že chovanie okamžitej úrokovej miery závisí len na trojici parametrov (parametre sú konštantné), čo tento model znevýhodňuje a preto sa používa len pre oceňovanie klasických úrokových derivátov, napr. cap, úrokový swap. Pre oceňovanie neštandardných derivátov, t.j. rôzne kombinácie úrokových a neúrokových derivátov, už nie je trojica parametrov dostačujúca.

2.3.2 Cox-Ingersoll-Rossov model

Jedným z najväčších nedostatkov Vašíčkovho modelu je, že môže nadobúdať záporné hodnoty. V prípade Cox-Ingersoll-Ross modelu to nie je možné. Ak je $r(t)$ blízko nule, volatilita je malá a vďaka driftu neklesne $r(t)$ pod nulovú hodnotu. Z časti 2.1.2 vieme, že CIR model má tvar

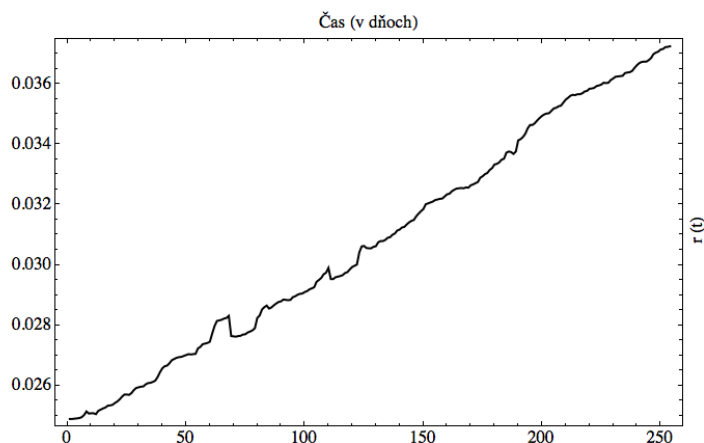
$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t).$$

Keďže sa jedná o modifikáciu Vašíčkovho modelu, má CIR model podobné využitie pri ohodnocovaní základných úrokových derivátov. Parametre CIR modelu sa chovajú obdobne ako parametre Vašíčkovho modelu opísané v časti 2.3.1.

2.3.3 Model Ho & Lee

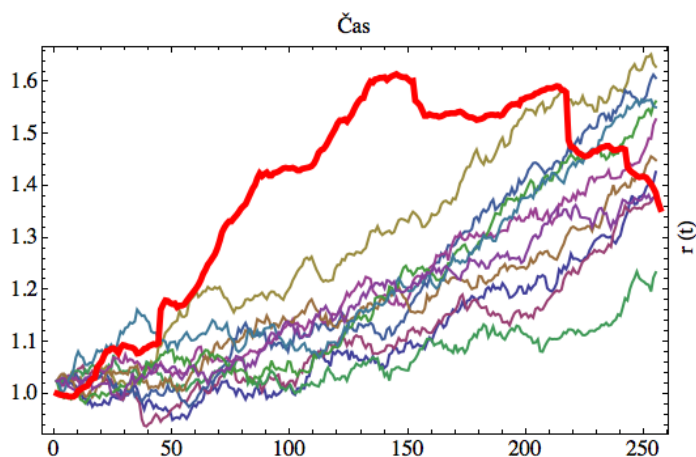
Model Ho & Lee je ďalším z modelov okamžitej úrokovej miery, popísaný v časti 2.1.3. Okamžitú úrokovú mieru sme volili rovnako ako u Vašíčkovho modelu, priebeh tejto sadzby je znázornený červenou na obrázku 2.1.

Parameter σ sme zvolili ako dennú smerodатnú odchýlku absolútnych výnosov okamžitej úrokovej sadzby. Na rozdiel od Vašíčkovho modelu, budeme potrebovať forwardovú krivku okamžitej úrokovej sadzby.



Obr. 2.7: Forwardová krivka 3M sadzby k dňu 22.12.2011

Aj keď model Ho & Lee nemá vlastnosť mean-reversion, môžeme z priebehu 3M forwardovej sadzby očakávať, že bude skôr rastúci.



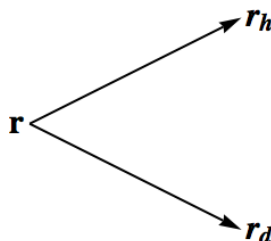
Obr. 2.8: 10 simulácií 3M sadzby Ho & Lee modelu

Ako sme už poznamenali v medeli Ho & Lee nemá sadzba návratovú hodnotu. Empiricky je však zistené, že úrokové sadzby túto vlastnosť majú. Výhodou tohto modelu je zahrnutie všetkých známych informácií v podobe počiatočnej výnosovej krivky, respektíve forwardových sadzieb. I keď sa jedná o model okamžitej úrokovej sadzby, je tento model komplexnejší než Vašíčkov a umožňuje presnejšie ohodnotenie zložitejších úrokových derivátov.

3. Stromy úrokových mier

V tejto kapitole sa budeme venovať oceňovaniu derivátov pomocou binárnych stromových modelov. Tento spôsob modelovania dynamiky úrokovej miery je často používaný na trhu. Model binomického stromu sa v rôznych situáciách používa ako diskretná aproximácia modelov v spojitom čase, ktorá pri infinitezimiálnom skracovaní príslušných časových intervalov konverguje k príslušnému spojitému modelu. Takéto modely sa uplatňujú predovšetkým pri oceňovaní finančných derivátov a obligácií. Informácie využité v tejto kapitole sme čerpali hlavne z [12].

Pri binomickom úrokovom strome predpokladáme, že poznáme dnešnú krátkodobú úrokovú mieru r , ktorá pri ďalšej časovej perióde (prvá perióda) môže nadobúdať iba dve možné hodnoty, vyššiu hodnotu r_h a nižšiu hodnotu r_d s určitou pravdepodobnosťou (obrázok 3.1). Pri druhej perióde môže krátkodobá úroková miera nadobúdať štyri možné hodnoty $r_{h,h}$, $r_{h,d}$, $r_{d,h}$ a $r_{d,d}$. Obecne pri n -tej perióde môže nadobúdať 2^n hodnôt. Ako alternatíva binomických úrokových stromov sa často využívajú rôzne typy trinomických stromov. Tieto modely zahŕňujú v sebe viaceré vlastnosti úrokových mier ako napríklad stredovú návratnosť. Tieto a mnohé iné úrokové stromy ale nie sú predmetom tejto bakalárskej práce.



Obr. 3.1: Krok binomického stromu

Implementácia takéhoto stromu, ktorý sa nazýva nerekombinantný je veľmi náročná na počet operácií. Napríklad hodnota dlhopisu by po 60-tich periódach nadobúdala viac než 10^{18} hodnôt. Preto sa v praxi preferuje používanie rekombinovaných binomických stromov úrokových mier, pre ktoré platí, že sekvencia pohybu hodnoty úrokovej miery "hore-nadol" vedie k rovnakému výsledku ako sekvencia "dole-nahor". Krátkodobá úroková miera tak môže po prvej perióde nadobúdať iba tri hodnoty namiesto štyroch. Po n -tej perióde tak môže nadobúdať $n + 1$ hodnôt.

3.1 Jednokrokový binomický strom

Základný predpoklad binomického modelu je, že hodnoty sledujú binomický proces opísaný vyššie. To znamená, že za časový interval δt , môže hodnota krátkodobej úrokovej miery vzrásť na r_h alebo klesnúť na hodnotu r_d . Parameter h predstavuje pohyb hodnoty nahor a parameter d pohyb hodnoty nadol. Hodnota r vzrastie s pravdepodobnosťou p a klesne s pravdepodobnosťou $1 - p$. Rendleman

a Bartter zjednodušili difúzny proces (1.6) do tvaru

$$dr = a \cdot r \cdot dt + b \cdot r \cdot dz, \quad (3.1)$$

kde a a b sú číselné parametre. Analogicky ako pri analýze prírastkov Brownovho pohybu (definícia 4) môžeme koeficienty a a b interpretovať ako strednú hodnotu a smerodiatnú odchýlku okamžitých relatívnych zmien procesu r . Princíp binomického modelu ukazuje obrázok 3.1, pričom hodnoty u , d a p volíme tak, aby stredná hodnota procesu r po uplynutí časového intervalu δt stanovená z binomického modelu bola rovná strednej hodnote stanovenej pomocou modelu (3.1) ako riešenie diferenciálnej rovnice (integráciou cez interval $(0, \delta t)$)

$$dr = ar dt.$$

To zabezpečí, že zmena hodnoty r za δt bude naozaj rovná a . To explicitne vyjadrené znamená, že musí platiť

$$\mathbb{E}(r) = prh + (1 - p)rd = ie^{a\delta t}. \quad (3.2)$$

Analogicky musí pre rozptyl vyjadrený z (3.1) ako druhá mocnina smerodatnej odchýlky, platiť

$$pr^2h^2 + (1 - p)r^2d^2 - (re^{a\delta t})^2 = r^2b^2\delta t. \quad (3.3)$$

Ak ešte k rovnostiam (3.2) a (3.3) pridáme zjednodušujúci predpoklad, že rast a pokles hodnoty na intervale δt je rovnaký

$$d = \frac{1}{h},$$

dostávame nasledujúce vzťahy

$$\begin{aligned} h &= e^{b\sqrt{\delta t}}, \\ d &= e^{-b\sqrt{\delta t}}, \\ p &= \frac{e^{a\delta t} - d}{h - d}. \end{aligned}$$

3.2 Viackrokový binomický strom

Podobne ako sme postupovali v časti 3.1, môžeme rozšíriť teraz jednokrokový strom na n -krokový. Pozorovaný čas T si rozdelíme na n intervalov dĺžky $\delta t = \frac{T}{n}$. Každý uzol v strome bude označený dvojicou indexov (i, j) . Index i predstavuje časový interval, v ktorom sa nachádzame a index j koľko krát hodnota vzrástla v danom časovom intervale. Teda platí, že $j \leq i$. Hodnota v uzle (i, j) potom bude

$$r_{i,j} = rh^jd^{i-j}.$$

Pri takomto výpočte hodnoty krátkodobej úrokovej miery postupujeme stromom rekurentne odzadu.

3.3 Vytvorenie stromu úrokových mier

Ďalší spôsob ako opísať takýto proces je založený na základe zmien v krátkodobej úrokovej miere r . Tieto zmeny môžeme vyjadriť rovnicou

$$\delta r_t = r_{t+\delta t} - r_t = \mu \delta t + \sigma \epsilon_t \sqrt{\delta t}, \quad (3.4)$$

kde μ označuje očakávanú absolútnu zmenu v krátkodobej úrokovej miere v danom časovom intervale, čo obecnne môže byť i funkcia času t , krátkodobej úrokovej miery r a iných stavových premenných. V prístupe z časti 3.1 sme uvažovali zjednodušený prístup kde $\mu = 0$. Parameter σ značí smerodiatnú odchylku a ϵ_t sú nezávislé binomicky rozdelené náhodné veličiny, ktoré nadobúdajú hodnoty 1 a -1 s rovnakou pravdepodobnosťou.

S narastajúcim počtom časových krokov konverguje binomické rozdelenie v distribúcii k normálnemu rozdeleniu, preto môžeme odhadovať, že binomický proces a proces opísaný vo vzťahu (3.4) sú veľmi podobné. V prípade, že δt pôjde k 0, môžeme prejsť z diskrétného modelu k spojitému. Takéto modely sme prebrali v časti 2.1. V praxi sa preferuje používať nasledujúci model:

$$\delta \ln r_t = \ln r_{t+\delta t} - \ln r_t = \mu \delta t + \sigma \epsilon_t \sqrt{\delta t}, \quad (3.5)$$

ktorý je podobný modelu (3.4). Takýto model ale zachytáva relatívnu zmenu úrokovej miery (odhadnutú $\ln r_{t+\delta t} - \ln r_t = \ln \frac{r_{t+\delta t}}{r_t} \simeq \frac{r_{t+\delta t}}{r_t} - 1$). Dôvod, prečo sa odporúča modelovať zmeny úrokovej miery v prirodzenom logaritme, je nemožnosť zápornej úrokovej miery s kladnou pravdepodobnosťou. Nedostatkou modelu (3.4) je, že po určitom počte pohybov nadol, môže úroková miera nadobudnúť záporné hodnoty s kladnou pravdepodobnosťou, bez ohľadu na to aká bola začiatočná úroková miera. Tomuto sa vyhneme použitím modelu založenom na základe relatívnych zmien.

3.4 Kalibrácia stromu úrokových mier

Deterministickou charakteristikou stromu úrokovej miery je, že ho môžeme kalibrovať na časovú štruktúru jednotkového bezkupónového dlhopisu, alebo vnútrobankového inštrumentu. Kalibrácia modelu takýmto spôsobom zaistí konzistentnosť so súčasnou časovou hodnotou štruktúry krátkodobej úrokovej miery. V tejto kapitole opíšeme kalibráciu modelu (tiež uvedenú v [12]) zapísaného v tvare relatívnych zmien (3.5).

Najprv určíme pohyb hodnôt. Parameter σ značí odhadovanú volatilitu krátkodobej úrokovej miery, T dobu do splatnosti (vyjadrenú v počte periód) oceňovaného dlhopisu a n počet periód stromu. Z rovnosti (3.5) dostávame v čase 0

$$\delta \ln r_0 = \ln r_{\delta t} - \ln r_0 = \mu \delta t + \sigma \epsilon_0 \sqrt{\frac{T}{n}},$$

alebo

$$\begin{aligned}\ln r_h &= \ln r_0 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}, \\ \ln r_d &= \ln r_0 + \mu\delta t - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}.\end{aligned}$$

Upravením rovníc dostaneme vzťah

$$\ln r_h - \ln r_d = 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} \Leftrightarrow r_h = r_d \exp(2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}). \quad (3.6)$$

V perióde k obecné platí vzťah

$$r_{(k+1)h} = r_{(k+1)d} \exp(2(k+1)\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}), \quad (3.7)$$

kde $r_{(k+1)h}$ značí $(k+1)$ pohyb hodnôt nahor v úrokovom strome. Teraz už môžeme prejsť ku kalibrácii stromu úrokovej miery. Pre zjednodušenie predpokladáme, že čas medzi dvoma periódami $\frac{T}{n} = 1$ rok. Bezrizikový strom úrokovej miery skonštruujeme pomocou výnosov z bezkupónových dlhopisov (predpokladané dlhopisy sú vysoko likvidné, napr. štátne dlhopisy). Takýto proces je iteračný, hodnota jednoročnej bezrizikovej úrokovej miery v čase 1 je odvodená použitím výnosu dlhopisu splatného o dva roky. Potom hodnotu jednoročnej bezrizikovej úrokovej miery v čase 2 odvodíme použitím výnosu dlhopisu splatného o tri roky.

Označíme y_n hodnotu výnosu z dlhopisu splatného o n rokov. Ďalším krokom je zvolenie hodnoty σ pre jednoročnú úrokovú mieru. Príkladom môže byť odhad historickej volatility za posledný 1 rok. Nasleduje stanovenie r_h a r_d . Hodnota dlhopisu so súčasnou hodnotou 100, ktorý má splatnosť o dva roky môže v čase 1 nadobúdať dve hodnoty: hodnotu P_h späť s r_h a hodnotu P_d späť s r_d . Odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned}P_h &= \frac{100 + y_2}{(1 + r_h)}, \\ P_d &= \frac{100 + y_2}{(1 + r_d)}.\end{aligned}$$

Súčasná hodnota dlhopisu s dvojročnou splatnosťou je rovná 100. Keďže pravdepodobnosť pohybu nahor v úrokovom strome je rovnaká ako pravdepodobnosť pohybu nadol, môžeme tieto vzťahy upraviť do rovnosti

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{P_h + y_2}{1 + y_1} + \frac{P_d + y_2}{1 + y_1} \right) &= 100, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{100+y_2}{(1+r_h)} + y_2}{1 + y_1} + \frac{\frac{100+y_2}{(1+r_d)} + y_2}{1 + y_1} \right) &= 100.\end{aligned}$$

Po použití

$$r_h = r_d \cdot \exp(2\sigma)$$

dostávame

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{100+y_2}{(1+r_d \exp(2\sigma))} + y_2}{1+y_1} + \frac{\frac{100+y_2}{(1+r_d)} + y_2}{1+y_1} \right) = 100,$$

odkiaľ vieme nájsť hodnotu r_d pri známych y_1 , y_2 a σ .

Hodnota trojročného bezkupónového dlhopisu v čase 2 môže nadobúdať hodnoty $P_{h,h}$, $P_{h,d}$ a $P_{d,d}$. Podobne ako v predchádzajúcom postupe dostávame

$$\begin{aligned} P_{h,h} &= \frac{100 + y_3}{(1 + r_{h,h})}, \\ P_{h,d} &= \frac{100 + y_3}{(1 + r_{h,d})} \end{aligned}$$

a

$$P_{d,d} = \frac{100 + y_3}{(1 + r_{d,d})}.$$

Pre hodnotu takéhoto dlhopisu v čase 1 dostávame

$$\begin{aligned} P_h &= \frac{1}{2} \left(\frac{P_{h,h} + y_3}{(1 + r_h)} + \frac{P_{h,d} + y_3}{(1 + r_h)} \right), \\ P_d &= \frac{1}{2} \left(\frac{P_{d,d} + y_3}{(1 + r_d)} + \frac{P_{h,d} + y_3}{(1 + r_d)} \right). \end{aligned}$$

Predpokladajme znova súčasnú cenu trojročného bezkupónového dlhopisu rovnú 100. Potom dostávame

$$\frac{1}{2} \left(\frac{P_h + y_3}{1 + y_1} + \frac{P_d + y_3}{1 + y_1} \right) = 100$$

Dosadením predchádzajúcich vzťahov a dôsledku z (3.7) t.j.

$$\begin{aligned} r_{h,h} &= r_{d,d} e^{4\sigma} \\ r_{h,d} &= r_{d,d} e^{2\sigma}, \end{aligned}$$

dostávame

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{100+y_3}{1+r_{d,d}e^{4\sigma}} + y_3}{1+r_h} + \frac{\frac{100+y_3}{1+r_{d,d}e^{2\sigma}} + y_3}{1+r_h} \right) + y_3}{1+y_1} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{100+y_3}{1+r_{d,d}e^{2\sigma}} + y_3}{1+r_d} + \frac{\frac{100+y_3}{1+r_{d,d}} + y_3}{1+r_d} \right) + y_3}{1+y_1} \right) = 100.$$

Z tejto rovnice vieme nájsť hodnoty $r_{d,d}$ pri známych hodnotách y_1 , y_2 , y_3 , r_d , r_h a σ . Tento proces budeme opakovať až po najdlhšiu hodnotu splatnosti časovej štruktúry úrokovej miery. V ďalšej časti si ukážeme názorný príklad.

3.5 Príklad stromu úrokovej miery

Uvažujeme dnešnú výnosovú krivku bezkupónového dlhopisu uvedenú v tabuľke nižšie 3.1.

Splatnosť (v rokoch)	Výnos (v %)
1	4.00
2	4.30
3	4.50

Tabuľka 3.1: Výnosy do splatnosti

Chceme spočítať 3 ročný (2 krokový) binomický strom úrokovej miery, za predpokladu, že volatilita $\sigma = 1\%$ pre 1 ročnú úrokovú mieru. Najprv vypočítame hodnoty r_h a r_d . Použitím vyššie uvedeného postupu a vzťahov dostávame rovnicu

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{100+4.3}{1+r_d e^{2/100}} + 4.3}{1 + 4\%} + \frac{\frac{100+4.3}{1+r_d} + 4.3}{1 + 4\%} \right),$$

z ktorej

$$r_d = 4.57\%$$

a

$$r_h = r_d e^{0.02} = 4.66\%.$$

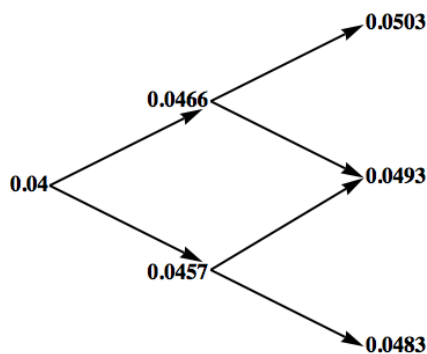
Aplikáciou postupu uvedeného v časti 3.4 ďalej dostávame

$$r_{d,d} = 4.83\%, r_{h,d} = r_{dd} e^{0.02} = 4.93\%$$

a

$$r_{h,h} = r_{dd} e^{0.04} = 5.03\%.$$

Výsledný scenár vývoja úrokovej miery je znázornený na obrázku 3.2



Obr. 3.2: Scenár vývoja úrokových mier

Záver

Modely časovej štruktúry úrokovej miery sú potrebné pri oceňovaní a zaistení finančných derivátov, ktoré sú závislé na budúcej hodnote úrokovej miery. V tejto práci sme sa zaoberali niektorými základnými typmi modelov. Väčšinou rozlišujeme modely na jednofaktorové a viacfaktorové.

Spoločnou črtou jednofaktorových modelov časovej štruktúry úrokovej miery je, že celú výnosovú krivku považujú za funkciu jednej premennej - okamžitej úrokovej miery. Merton (1973) a Vašíček (1977) sú jedny z prvých príkladov takýchto modelov. Motiváciou pre tieto modely bol fakt, že aproximácie cien dlhopisov rôznych dôb splatností sa pohybujú v korelovaných hodnotách, závislých na variácii krátkodobej úrokovej miery. Hlavným nedostatkom jednofaktorových modelov je práve tento fakt, t.j., že implikujú korelovanosť všetkých možných bezkupónových sadzieb, čo robí z dlhopisov dlhodobé aktíva. Empirické analýzy dynamiky úrokovej miery ukazujú, že dva až tri faktory dokážu zohľadniť čo najviac zmien výnosovej krivky. To robí viacfaktorové modely vhodnejšie pre oceňovanie a zaistenie finančných derivátov. Kalibrácia takýchto modelov je vďaka väčšiemu počtu parametrov ale ťažšia a časovo náročnejšia.

V teoretickej časti sme si zadefinovali pojmy potrebné k uvedeniu stochastických modelov úrokových mier. Podrobne sme rozobrali modely okamžitej sadzby a základy úrokových stromov. V časti 2.1 sme sa zamerali na tri modely okamžitej úrokovej miery - Vašíčkov, Cox-Ingersoll-Rossov a Ho & Lee model. V nasledujúcej podkapitole 2.2 sme ukázali obecnú metódu kalibrácie na reálne dáta a postup aplikovali na Ho & Lee model. Zo simulácií v časti 2.3 sme zistili vplyv jednotlivých parametrov na tvar modelu úrokovej miery. Z modelov, na ktoré sme sa zamerali sa nám ako najviac komplexný javil práve model Ho & Lee. V poslednej časti sme si uviedli stromy úrokových mier a zamerali sme sa na tvorbu binomického stromu na základe ocenenia bezkupónového dlhopisu a kalibrácie na reálne dáta. V práci sme popísali a porovnali medzi sebou vybrané modely úrokových mier, čo naplnilo dopredu stanovené ciele práce.

Zoznam použitej literatúry

- [1] ANDĚL, J. *Základy matematické statistiky*. 1. vydání. MATFYZPRESS, 2007. ISBN 80-86732-40-1.
- [2] ARNOLD, L. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. New York : Wiley.
- [3] CIPRA, T. *Matematika cenných papírů*. 1. vydání. nakladatelství HZ Praha, spol. s.r.o., 2000. ISBN 80-86009-35-1.
- [4] COX, J. INGERSOLL, J. ROSS, S. *A Theory of the Term Structure of Interest Rate*. Econometrica, 1985.
- [5] DUFFIE, D. *Futures Market*. Englewood Cliffs, 1989.
- [6] HO, T. LEE, S. *Term Structures Movements and Pricing Interest Claims*. Journal of Finance, 1986.
- [7] INGERSOLL, J. *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield, 1987.
- [8] JANEČEK, Karel. *Stochastic Calculus in Finance*.
- [9] KWOK, Y.K. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. 2. Springer , 2008.
- [10] LUND, J. *Dynamic Models of the Term Structure of Interest Rate (Master's thesis)*. The Aarhus School of Business 1993.
- [11] MÁLEK, Jiří. *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*. 1. vydání. Nakladatelství EKOPRESS, s.r.o., 2005. ISBN 80-86119-97-1.
- [12] MARTELLINI, L. PRIAULET, P. PRIAULET, S. *Fixed-income securities*. John Wiley & Sons Ltd, 2003. ISBN 0-470-85277-1.
- [13] MELICHERČÍK, I. OLŠAROVÁ, L. ÚRADNÍČEK, V. *Kapitoly z finanční matematiky*. EPOS, 2005. ISBN 80-8057-651-3.
- [14] ŠEVČOVIČ, D. STEHLÍKOVÁ, B. MIKULA, K. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. 1. vydanie. Nakladateľstvo STU, 2009. ISBN 978-80-227-3014-3.
- [15] VAŠÍČEK, O. *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*. Journal of Financial Economics, 1997, No 5,.

Zoznam obrázkov

2.1	Porovnanie simulácií a skutočnej sadzby za rok 2011.	19
2.2	10 simulácií Vašíčkovho modelu s parametrom $a = 0.25$	20
2.3	10 simulácií Vašíčkovho modelu s parametrom $a = 1$	20
2.4	10 simulácií Vašíčkovho modelu s parametrom $b = 0.1$	21
2.5	10 simulácií Vašíčkovho modelu s parametrom $b = 0.6$	21
2.6	Rôzne nastavenie parametra σ	22
2.7	Forwardová krivka 3M sadzby k dňu 22.12.2011	23
2.8	10 simulácií 3M sadzby Ho & Lee modelu	23
3.1	Krok binomického stromu	24
3.2	Scenár vývoja úrokových mier	29

Zoznam tabuliek

2.1	Prehľad jednofaktorových modelov okamžitej úrokovej miery . . .	11
2.2	Nakalibrované parametre Vašíčkovho modelu	19
2.3	Hodnoty parametrov simulácií Vašíčkovho modelu s rôznou hodnotou parametra a	19
2.4	Hodnoty parametrov simulácií Vašíčkovho modelu s rôznou hodnotou parametra b	21
2.5	Parametre simulácií Vašíčkovho modelu pri rôznej hodnote σ . . .	22
3.1	Výnosy do splatnosti	29

Prílohy

Príloha č. 1

K práci je priložené CD obsahujúce program `miery.nb`, ktorý je naprogramovaný v systéme Wolfram Mathematica 8.0 for Students. Program obsahuje príkazy na simulácie a kalibrácie modelov úrokových mier. Taktiež vytváranie grafov jednotlivých modelov použitých v našej práci. Na CD sa nachádza tiež táto práca v PDF formáte.